

Лабораторна робота №4

Оптимізація функції однієї змінної методом золотого перетину

Мета роботи: практичне засвоєння застосування методу золотого перетину для оптимізації функції однієї змінної

Теоретичні відомості

Одним з методів безпосереднього пошуку, який застосовується для розв'язання задачі однопараметричної безумовної оптимізації є метод золотого перетину. Як і деякі інші методи безпосереднього пошуку він включає алгоритм локалізації екстремуму та алгоритм зменшення інтервалу, що містить екстремум.

Метод золотого перетину базується на використанні здавна відомого числа $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$, яке називається числом золотого перетину. Саме число та правила його використання були відомі ще в Древній Греції.

Покроковий алгоритм пошуку мінімуму функції, починаючи з точки x_0 наведено нижче.

Підготовчий крок. Вибрати точку x_0 , знайти значення функції у цій точці $Q(x_0)$, задатись розміром початкової зміни аргументу a .

Крок 1. Від початкової точки зробити довільний крок a у довільному напрямку і визначити значення функції: $Q(x_0+a)$.

Крок 2. Якщо $Q(x_0+a) < Q(x_0)$, то наступна точка визначається як $x_0+a \cdot (1+\tau)$, де $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$ - число золотого перетину, в іншому випадку у точці $x_0-a \cdot \tau$ (рисунки 4.1 а та б відповідно). Одержані три точки необхідно перенумерувати таким чином, щоб $x_1 < x_2 < x_3$. Таким чином одержано 3 точки зі значеннями функції відповідно Q_1, Q_2 та Q_3 .

Крок 3. Провести аналіз положення мінімального (з трьох відомих) значення функції, а саме: чи знаходиться точка з мінімальним значенням функції у точці x_2 (іншими словами всередині проміжку і тоді мінімум локалізовано) - тоді перейти до кроку 5 або в одній з крайніх точок (x_1 та x_2) - (тоді мінімум не локалізовано) перейти до кроку 4.

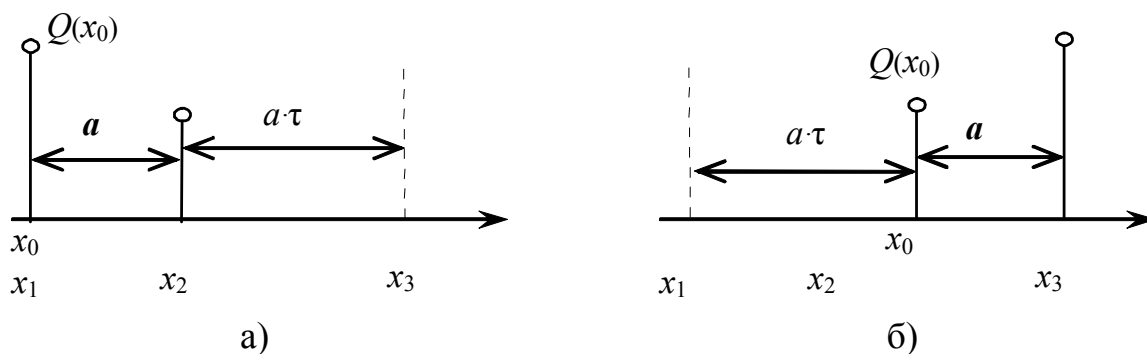


Рисунок 4.1. Схема побудови чергової точки методом золотого перетину

Крок 4. Знайти точку x_4 за наступним правилом:

якщо $\min(Q) = Q_1$: то $x_4 = x_1 - \tau \cdot (x_2 - x_1)$ і $x_1 = x_4, x_2 = x_1; x_3 = x_2$;

якщо $\min(Q) = Q_3$: то $x_4 = x_3 + \tau \cdot (x_3 - x_2)$ і $x_1 = x_2, x_2 = x_3; x_3 = x_4$;

Перейти до кроку 3.

Крок 5. Наступне значення функції обчислюється у точці $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$. Після чого відкидається одна точка, таким чином, щоб $\min(Q) = Q_2$.
Перейти до кроку 6.

Крок 6. Якщо $|x_3 - x_1|$ достатньо мала величина припинити обчислення, в іншому випадку - перейти до кроку 5.

Приклад оптимізації функції

Задача: методом золотого перетину знайти мінімум функції:
 $Q(x) = (x - 3) \cdot (x - 2) + \frac{(x - 3)}{x + 2}$, починаючи з точки $x_0 = 8$. Точність $\varepsilon = 0.05$.

Розв'язок:

Підготовчий крок: $x_0 = 8, Q(x_0) = 30.5$;

Величину початкового кроку вибираємо $a = 1.5$.

Крок 1: $x_1 = x_0 + a = 9.5, Q(x_1) = 49.32$.

Крок 2: Оскільки $Q(x_1) > Q(x_0)$, то наступна точка:

$$x_2 = x_0 - a \cdot \tau = x_0 - \frac{a \cdot (1 + \sqrt{5})}{2} = 5.57 \quad Q(x_2) = 9.53.$$

Одержані точки нумеруються зліва на право:

$$x_1 = 5.57 \quad Q(x_1) = 9.53$$

$$x_2 = 8 \quad Q(x_2) = 30.5$$

$$x_3 = 9.5 \quad Q(x_3) = 49.32$$

Крок 3: Оскільки мінімум функції не локалізовано $\min(Q(x)) = Q(x_1)$, переходимо до кроку 4.

Крок 4: Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 - \tau \cdot (x_2 - x_1) = 1.65 \quad Q(x_4) = 0.11;$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = 1.65 \quad Q(x_1) = 0.11$$

$$x_2 = 5.57 \quad Q(x_2) = 9.53$$

$$x_3 = 8 \quad Q(x_3) = 30.5$$

Переходимо до кроку 3.

Крок 3: Оскільки мінімум функції не локалізовано $\min(Q(x)) = Q(x_1)$, переходимо до кроку 4.

$$x_4 = x_1 - \tau \cdot (x_2 - x_1) = -4.71 \quad Q(x_4) = 54.55;$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = -4.71 \quad Q(x_1) = 54.55$$

$$x_2 = 1.65 \quad Q(x_2) = 0.11$$

$$x_3 = 5.57 \quad Q(x_3) = 9.53$$

Переходимо до кроку 3.

Крок 3. Мінімум локалізовано: $Q(x_2) < Q(x_1)$ та $Q(x_2) < Q(x_3)$.

Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = -0.78 \quad Q(x_4) = 7.41$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = -0.78 \quad Q(x_1) = 7.41$$

$$x_2 = 1.65 \quad Q(x_2) = 0.11$$

$$x_3 = 5.57 \quad Q(x_3) = 9.53$$

Крок 6. $|x_3 - x_1| = 6.35 > \varepsilon$, значить переходимо до кроку 5.

Крок 5. Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 3.15 \quad Q(x_4) = 0.20$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = -0.78 \quad Q(x_1) = 7.41$$

$$x_2 = 1.65 \quad Q(x_2) = 0.11$$

$$x_3 = 3.15 \quad Q(x_3) = 0.2$$

Крок 6. $|x_3 - x_1| = 3.92 > \varepsilon$, значить переходимо до кроку 5.

Крок 5. Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 0.72 \quad Q(x_4) = 2.08$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = 0.72 \quad Q(x_1) = 2.08$$

$$x_2 = 1.65 \quad Q(x_2) = 0.11$$

$$x_3 = 3.15 \quad Q(x_3) = 0.2$$

Крок 6. $|x_3 - x_1| = 2.43 > \varepsilon$, значить переходимо до кроку 5.

Крок 5. Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 2.22 \quad Q(x_4) = -0.36$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = 1.65 \quad Q(x_1) = 0.11$$

$$x_2 = 2.22 \quad Q(x_2) = -0.36$$

$$x_3 = 3.15 \quad Q(x_3) = 0.2$$

Крок 6. $|x_3 - x_1| = 1.5 > \varepsilon$, значить переходимо до кроку 5.

Крок 5. Точку x_4 знаходимо за формулою:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 2.57 \quad Q(x_4) = -0.34$$

Перенумеруємо точки:

$$x_1 = 1.65 \quad Q(x_1) = 0.11$$

$$x_2 = 2.22 \quad Q(x_2) = -0.36$$

$$x_3 = 2.57 \quad Q(x_3) = -0.34$$

Крок 6. $|x_3 - x_1| = 0.93 > \varepsilon$, значить переходимо до кроку 5.

Таким чином кроки 5 та 6 необхідно повторювати до тих пір, поки розмір інтервалу буде більше заданої точності оптимізації.

Реалізація розрахунків в системі електронних таблиць

При реалізації методу в середовищі електронних таблиць необхідно виділити один стовпчик під значення аргументу і один стовпчик під значення функції. Функцію записати з посиланням на клітинку, що містить значення аргументу, щоб в подальшому легко знаходити значення функції у будь-якій точці.

Виконати підготовчий крок та крок 1, після чого визначитись з напрямком пошуку і провести крок 2. Для зручності, в третьому стовпчику доцільно проставляти номери точок, які знаходяться в роботі.

Після локалізації мінімуму перейти до етапу скорочення інтервалу, продовжуючи нумерувати точки. Через декілька ітерацій в додатковому стовпчику записувати значення $x_3 - x_1$ для оцінки точності оптимізації. При досягненні заданої точності припинити обчислення.

Завдання на лабораторну роботу

Провести оптимізацію методом золотого перетину в середовищі електронних таблиць функції заданої викладачем.

Контрольні запитання:

1. Чи необхідно для роботи методу золотого перетину попередньо локалізувати інтервал?
2. Порівняйте відносну швидкість скорочення інтервалу методом золотого перетину та методом поділу інтервалу навпіл.

Рекомендована література: [1], [4], [5]